

6

LÍNEAS DE INFLUENCIA

6.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Si bien en el tratamiento del tema, por simplicidad nos referimos a casos de vigas, la generalización a otros tipos de estructuras es casi inmediata y no requiere de nuevos conceptos a los necesarios en nuestro tratamiento.

La posibilidad de cargas móviles implica la necesidad de obtener:

- las solicitaciones, deformaciones, etc., que produce una carga (o un estado de cargas) para distintos puntos de aplicación de la misma.
- El estado más desfavorable de aplicación de la carga, que trae aparejada las mayores solicitaciones o deformaciones, y con las cuales tiene que ser evaluada una sección dada

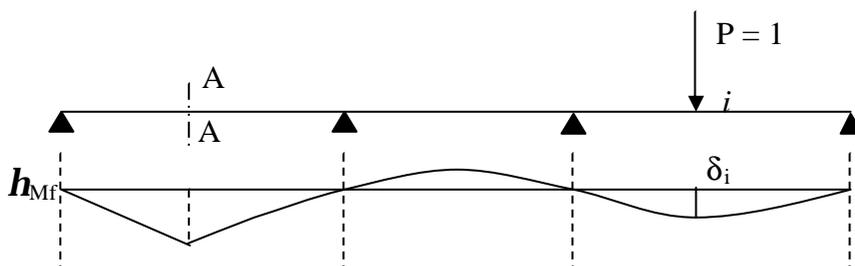
Estas dos necesidades deben ser tenidas en cuenta en todas las secciones de la viga, o por lo menos, en varias secciones características según las circunstancias.

El trazado de diagramas o Líneas de Influencia nos permite una adecuada respuesta a las dos necesidades y su utilización es casi imprescindible en el caso de estudios de puentes, puentes grúa, etc., donde las cargas móviles (p) tienen una cierta importancia con respecto a peso propio o carga permanentes (g).

6.2 DEFINICIÓN DE LÍNEAS DE INFLUENCIA

Definiremos como líneas de influencia de una solicitación (o deformación), en la sección A-A, a un diagrama tal, que su ordenada en un punto i mida, en una determinada escala, el valor de la solicitación en la sección A-A (o de la deformación), cuando en el punto i de referencia actúa una carga de valor unitario.

En el caso de la figura, diremos que $h_{Mf(A)}$ es la Línea de Influencia del momento flector en A, si se cumple que la



A, si se cumple que la ordenada δ_i representa el valor del momento flector en A para una carga $P = 1$ aplicada en el punto i .

$$Mf(A) = \delta_i * (\text{escala de L. de I.}) \text{ para } P = 1 \text{ aplicada en } i$$

Si $P \neq 1$ se cumplirá:

$$Mf(A) = P * \delta_i * (\text{escala de L. de I.})$$

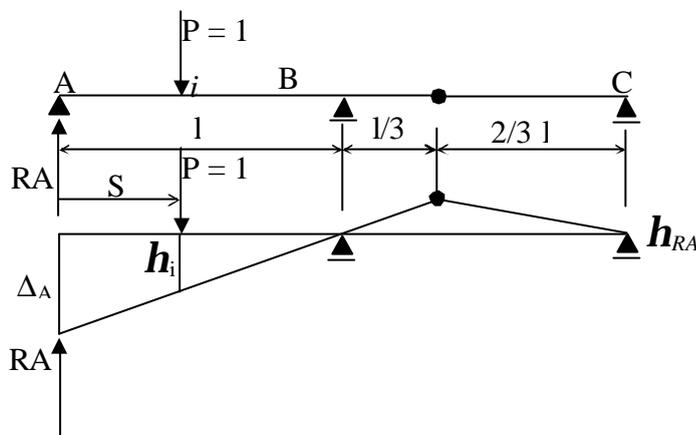
Esto mismo puede aplicarse para otros estados de carga y otras solicitaciones, reacciones, deformaciones, etc.

6.3 LINEAS DE INFLUENCIA EN SISTEMAS ISOSTÁTICOS

Recordemos algunos elementos básicos aplicados en sistemas isostáticos simples a fin de apreciar las similitudes y diferencias con el tratamiento que daremos a las vigas hiperestáticas. Nada mejor para esto que la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, en el método de la Cadena Cinemática en una viga isostática de dos tramos para distintos casos de solicitaciones, o Método Analítico.

6.3.1 LÍNEA DE INFLUENCIA DE UNA REACCIÓN

Deseamos la L. de I. de RA que denominamos con η_{RA} . Eliminamos el apoyo A, colocamos el esfuerzo correspondiente al vínculo suprimido, y damos un desplazamiento Δ_A en el apoyo al mecanismo formado. Por aplicación de P.T.V.:

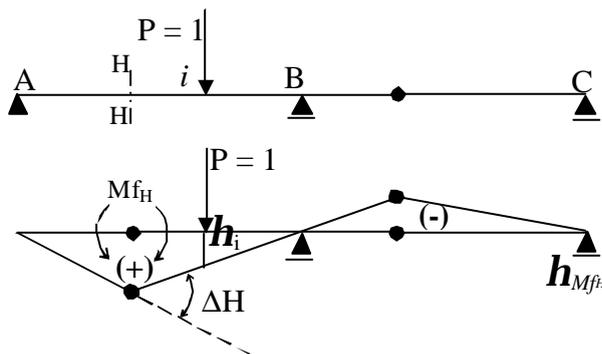


$$- R_A \cdot \Delta_A + 1 \text{tn} \cdot \eta_i = 0$$

$$R_A = \eta_i \frac{1 \text{tn}}{\Delta_A} \quad \therefore \eta_{RA} = \eta_i$$

Donde vemos que RA es proporcional a la coordenada h_i o sea que h_i en una determinada escala puede representar el valor de RA para una carga unitaria aplicada en i, dónde $\frac{1}{\Delta_A}$ se puede incorporar como factor de escala.

6.3.2 LÍNEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR



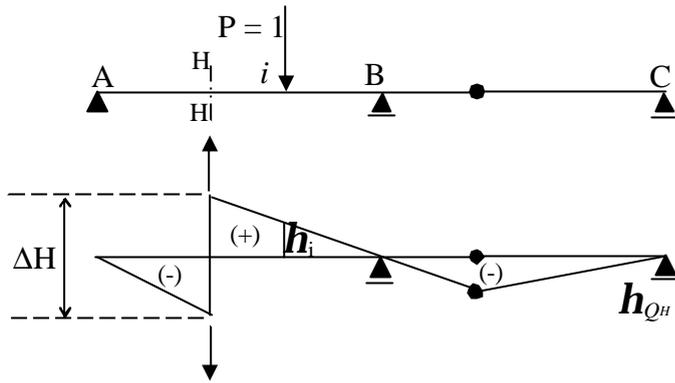
Deseamos la L. de I. del M_{f_H} en la sección HH. Para ello eliminamos el vínculo que transmite el momento en dicha sección introduciendo una articulación. A la cadena cinemática formada, doy un desplazamiento virtual y aplico el P.T.V después de explicitar el M_{f_H} en la sección (+ tracción abajo).

$$- M_{f_H} \cdot \Delta_H + 1 \text{tn} \cdot \eta_i = 0$$

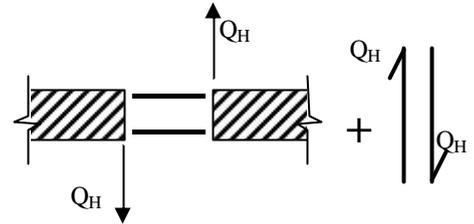
$$M_{f_H} = \eta_i \frac{1 \text{tn}}{\Delta_A} \quad \therefore \eta_{M_{f_H}} = \eta_i$$

Con las mismas condiciones anteriores podemos decir que el diagrama cinemático es en una determinada escala la línea de influencia buscada.

6.3.2 LÍNEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE



Para el esfuerzo de corte Q_H eliminamos un vínculo al introducir en H-H un mecanismo como el siguiente:

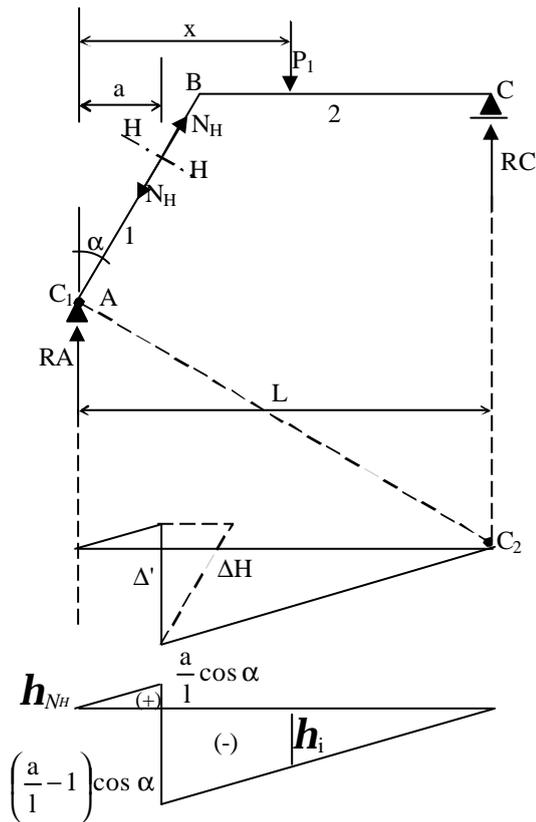


Aplicando el P.T.V.:

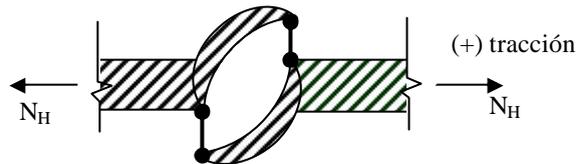
$$Q_H \cdot \Delta_H - 1 \cdot \eta_i = 0$$

$$Q_H = \eta_i \frac{1 \cdot \eta_i}{\Delta_H} \quad \therefore \eta_{Q_H} = \eta_i$$

6.3.2 LÍNEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO NORMAL



En este caso se introduce un mecanismo que no transmite esfuerzos normales:



Se pueden hallar los centros de rotación, y el desplazamiento de ΔH en la dirección de N_H por aplicación del P.T.V. y la teoría de Cadena Cinemática.

Analicémoslo a este caso en forma analítica, que permite una buena visualización del problema:

$$RA = 1t * \frac{(1-x)}{1} = 1t \left(1 - \frac{x}{1} \right)$$

para $P = 1t$ entre $0 \leq x \leq a$

$$N_H = (1t - RA) \cos \alpha$$

$$N_H = 1t * \frac{x}{1} \cos \alpha \begin{cases} x=0 \rightarrow N_H = 0 \\ x=a \rightarrow N_H = \frac{a}{1} \cos \alpha \end{cases}$$

para $P = 1t$ entre $a \leq x \leq 1$

$$N_H = -RA \cos \alpha$$

$$N_H = -1t \left(1 - \frac{x}{1} \right) \cos \alpha \begin{cases} x=a \rightarrow N_H = -\left(1 - \frac{a}{1} \right) \cos \alpha \\ x=1 \rightarrow N_H = 0 \end{cases}$$

Métodos análogos a los problemas isostáticos aparecen en los casos hiperestáticos, con algunas variantes.

Desarrollaremos alguno de estos métodos en los próximos puntos.

6.4 LÍNEA DE INFLUENCIA EN SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

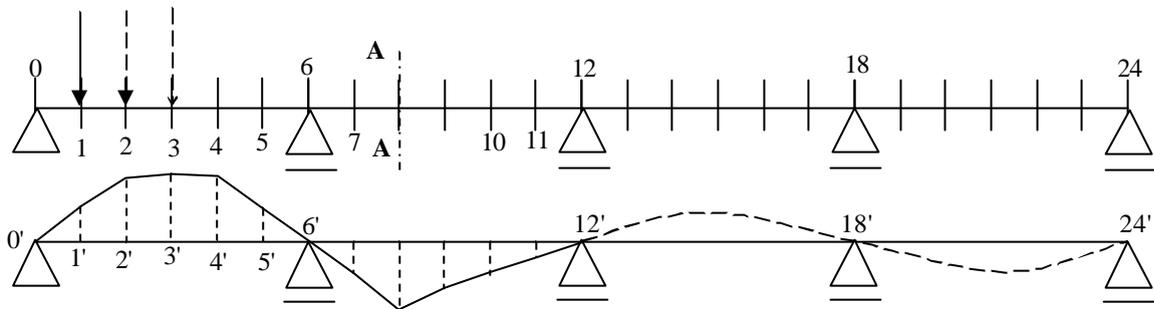
Analicemos por distintos métodos, una viga continua de cuatro tramos (grado 3 de hiperestaticidad)

6.4.1 MÉTODO POR PUNTOS

Es un método cuya explicación es inmediata, basada en la aplicación de la definición de L de I.

Supongamos que la L de I del Momento flector en A-A (η_{MfA}).

Dividamos cada tramo de la viga en partes iguales (cuyo largo dependerá de la precisión requerida) que en nuestro caso es igual a 6 partes.



Coloquemos $P = 1\text{tn}$ en el punto 1. Calculamos el Mf_A para esa carga (η_1) y al valor (en una determinada escala) lo dibujamos debajo del punto 1 (1').

Corremos $P = 1\text{tn}$ al punto 2. Calculamos el Mf_A para esa carga (η_2) y al valor lo dibujamos debajo del punto 2 (2'), y así sucesivamente para todos los puntos (3, 4, ..., 23, 24).

Unimos los puntos 0', 1', 2'..., 23', 24' mediante curvas o poligonales, y por la forma de su construcción esta curva o poligonal es la L de I buscada (η_{MfA}).

El método puede ser largo, según el número de puntos elegidos, pues para cada uno es necesario resolver un hiperestático.

Dichos cálculos se pueden facilitar con la utilización de computadora, utilización de la matriz β para los distintos estados de carga, o la utilización de condiciones de simetría, si la estructura fuera simétrica.

6.4.2 MÉTODO DE MÜLLER-BRESLAU (Aplicación de Betti - Maxwell)

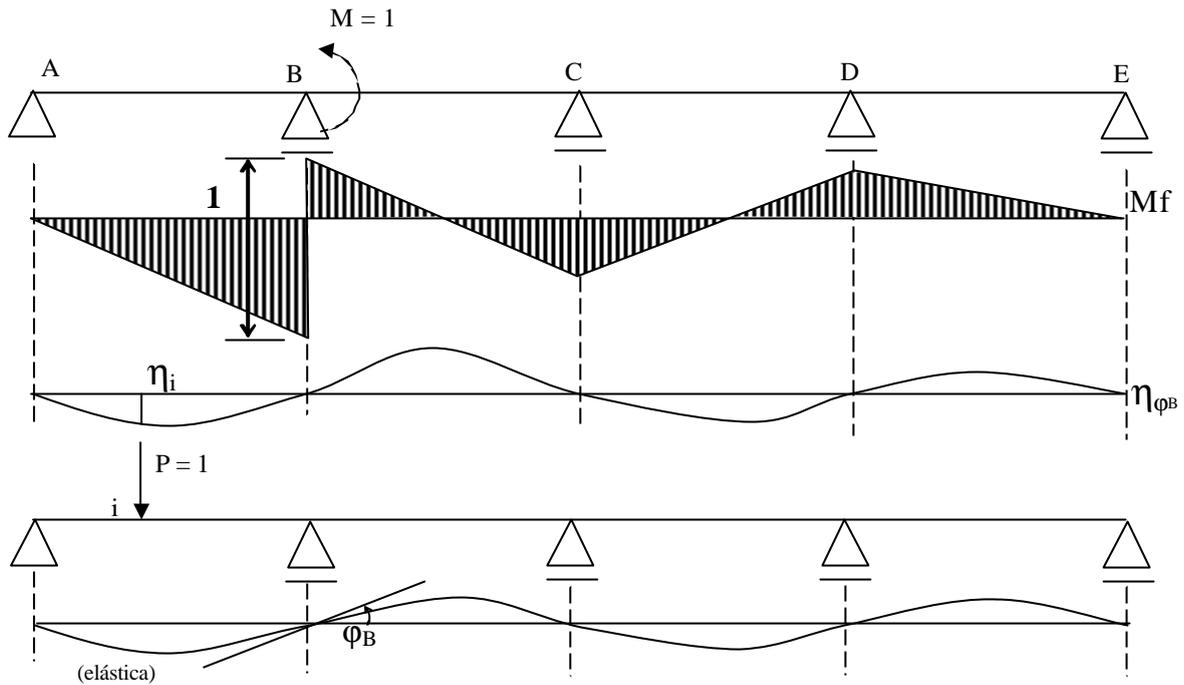
6.4.2 a Línea de influencia de deformaciones

Sea la viga de la figura, y queremos calcular η_{ϕ_B} (Línea de Influencia de la rotación del nudo B). Para ello aplicamos en el nudo B la carga correspondiente con la deformación cuya L de I se busca, en este caso un momento unitario $M = 1$.

Resolvemos la viga y con las solicitaciones hallamos la elástica para ese estado de cargas.

Demostraremos que esta elástica es la L de I de la rotación ϕ_B (η_{ϕ_B}).

Para ello aplicamos $P = 1$ en un punto genérico i , hallamos la elástica y la rotación ϕ_B para este estado de carga.



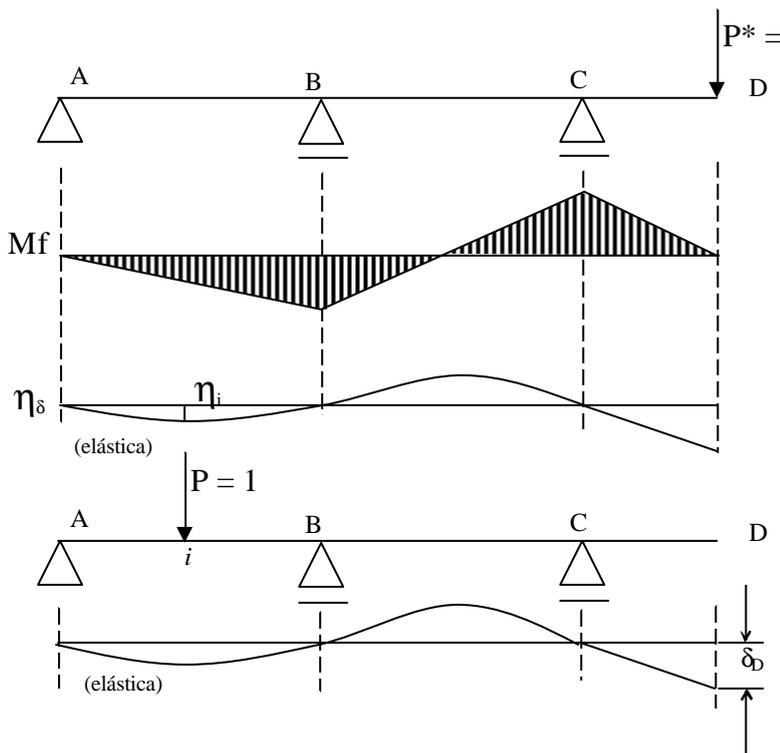
Aplicamos el teorema de Maxwell entre estos dos estados de carga:

$$M \cdot \varphi_B = P \cdot \eta_i \quad ; \quad \text{siendo } M = 1 \text{ tnm} \quad \text{y} \quad P = 1 \text{ tn}$$

$$\varphi_B = \frac{1 \text{tn}}{1 \text{tnm}} \cdot \eta_i$$

$$\varphi_B = \eta_i \cdot [\text{Escala de L. de I.}] = \eta_{\varphi B}$$

Es decir que en una escala determinada, la primer elástica representa φ_B para cada punto i , o sea es su Línea de Influencia.



Como un segundo ejemplo analicemos en la siguiente viga la L de I del descenso en el punto D ($\eta_{\delta D}$).

Siguiendo los mismos pasos, aplico en D la carga $P^*=1$, correspondiente con δ_D .

Calculamos el diagrama de Momentos y hallamos su elástica.

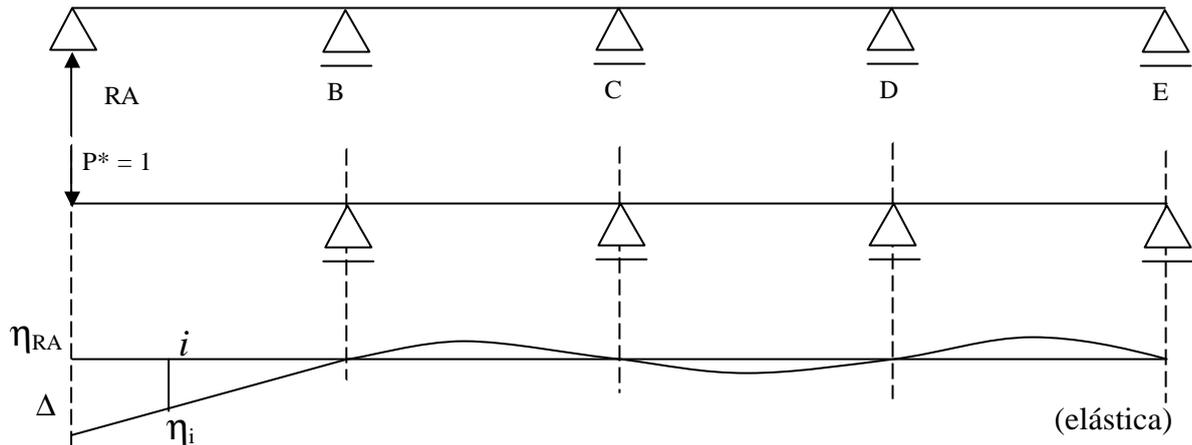
Aplicamos $P=1$ en el punto i , hallo la elástica y δ_D y por el teorema de Maxwell:

$$P * \delta_D = P \cdot \eta_i$$

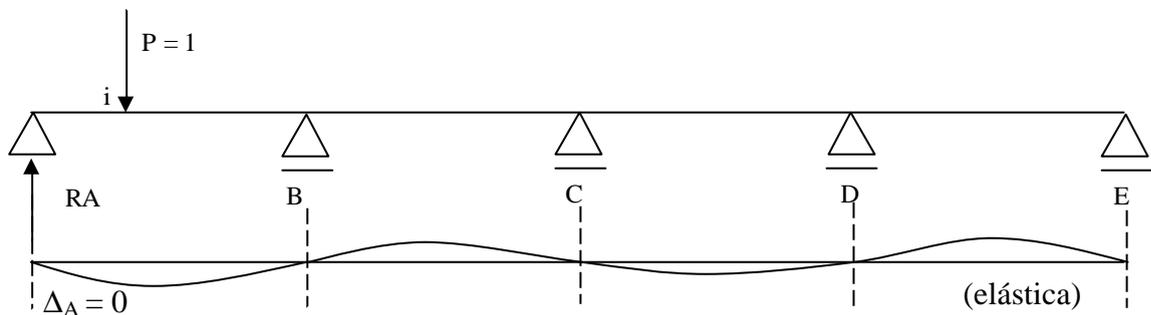
$$\delta_D = \eta_i [\text{Escala de L. de I}] = \eta_{\delta D}$$

6.4.2 b Línea de influencia de una Reacción

Deseamos la L. de I. de la reacción R_A (η_{RA}). Eliminamos el apoyo y aplicamos en ese punto una carga $P^* = 1$. Hallamos las solicitaciones y la elástica, que demostraremos es la L. de R_A (η_{RA}).



Aplicamos ahora un segundo estado de cargas $P = 1$ en un punto i , junto con el verdadero valor de la reacción R_A para esta carga, por lo cual el descenso Δ_A debe ser igual a cero.



Aplicando el teorema de Maxwell:

$$P * \Delta_A = -R_A \cdot \Delta + P \cdot \eta_i = 0 \quad R_A = \frac{1 \Delta \eta_i}{\Delta}$$

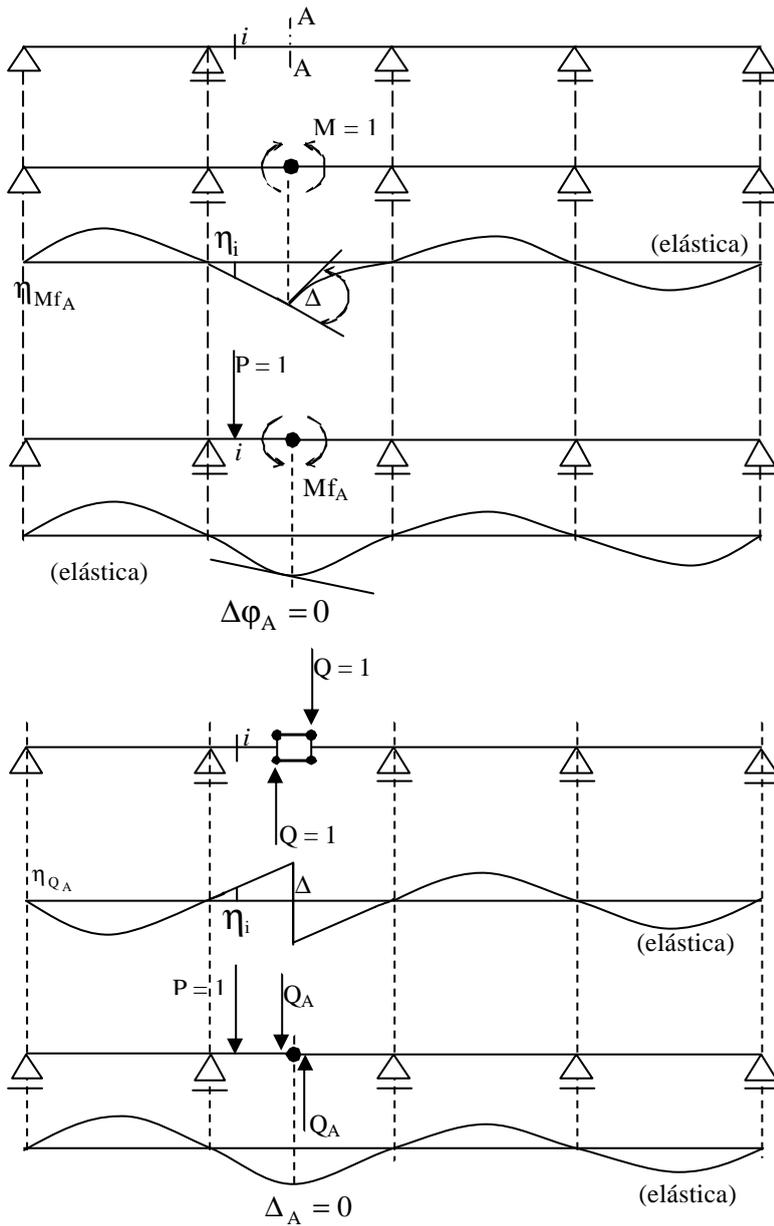
$$R_A = \eta_i [\text{Esc. de L. de I.}] = \eta_{RA}$$

6.4.2 c Línea de influencia de una Solicitación

Sea la viga con una sección A - A en la cual queremos la L. de I. del momento flector en A (η_{MfA}).

En A eliminamos el vínculo que resiste el momento flector, es decir colocamos una articulación, y además aplicamos un par de momentos $M = 1$. Hallamos las solicitaciones y la elástica, que demostraremos es la L. de I. η_{MfA} .

Para ello aplicamos en un punto genérico i una carga $P = 1$ y el valor del verdadero Mf_A que corresponde a la viga original para dicha carga. La viga con la carga $P = 1$ y Mf_A se



comportará como la original, que por no tener en A una articulación, no sufrirá en dicho punto una rotación relativa y por lo tanto $\Delta\phi_A = 0$.

Aplicando el Teorema de Maxwell:

$$M \cdot \Delta\phi_A = P \cdot \eta_i - Mf_A \cdot \Delta = 0$$

$$Mf_A = \frac{1 \tan}{\Delta} \eta_i$$

$$Mf_A = \eta_i [\text{Esc. de L. de I.}] = \eta_{Mf_A}$$

Veamos ahora en la misma sección la L. de I. del esfuerzo de corte Q_A (η_{Q_A}). Aplicamos en A el mecanismo de 6.3.3, con un par de $Q = 1$.

Hallamos las solicitaciones y la elástica será la L. de I. buscada (η_{Q_A}).

Aplico $P = 1$ en i y en A el verdadero valor de Q_A con lo cual el desplazamiento relativo normal al eje de la barra en la sección A será nulo ($\Delta_A = 0$).

Aplicando el Teorema de Maxwell:

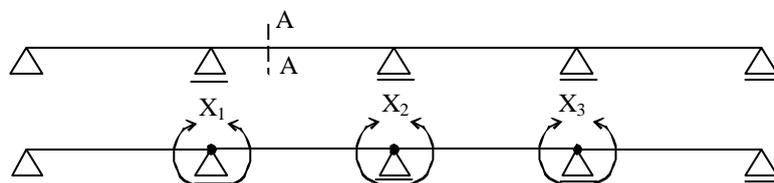
$$Q^* \cdot \Delta_A = P \cdot \eta_i - Q_A \cdot \Delta = 0$$

$$Q_A = \frac{1 \tan}{\Delta} \eta_i$$

$$Q_A = \eta_i [\text{Esc. de L. de I.}] = \eta_{Q_A}$$

6.4.2 d Línea de Influencia por superposición de efectos (Matriz b)

Para aprender este método vamos a trabajar con una viga continua que posee cuatro tramos, o sea con tres incógnitas hiperestáticas; en forma genérica indicamos que esa viga tiene un apoyo fijo y los demás móviles.



Por el método de las fuerzas, en función del isostático fundamental adoptado, en una sección genérica A, el momento viene dado por la expresión:

$$M^A = M_0^A + X_1 M_1^A + X_2 M_2^A + X_3 M_3^A$$

Si quisiéramos conocer η_{M^A} , deberíamos identificar en la expresión que factores dependen del estado de cargas. Ellos son:

$$M_0^A, X_1, X_2 \text{ y } X_3.$$

Será entonces:

$$\eta_{M^A} = \eta_{M_0^A} + \eta_{X_1} M_1^A + \eta_{X_2} M_2^A + \eta_{X_3} M_3^A$$

Para obtener las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas utilizamos las propiedades de los coeficientes β vistos en el Capítulo 2 en el tema de Matriz β . Recordemos que:

$$X_i = \delta_{10} \beta_{i1} + \delta_{20} \beta_{i2} + \dots + \delta_{n0} \beta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{j0} \beta_{ij}$$

dónde:

X_i : incógnita hiperestática

δ_{j0} : término que depende de las cargas exteriores.

$\beta_{ij} = \beta_{ji}$: coeficiente independiente de las cargas exteriores.

Si queremos la línea de influencia η_{X_i} en nuestra viga

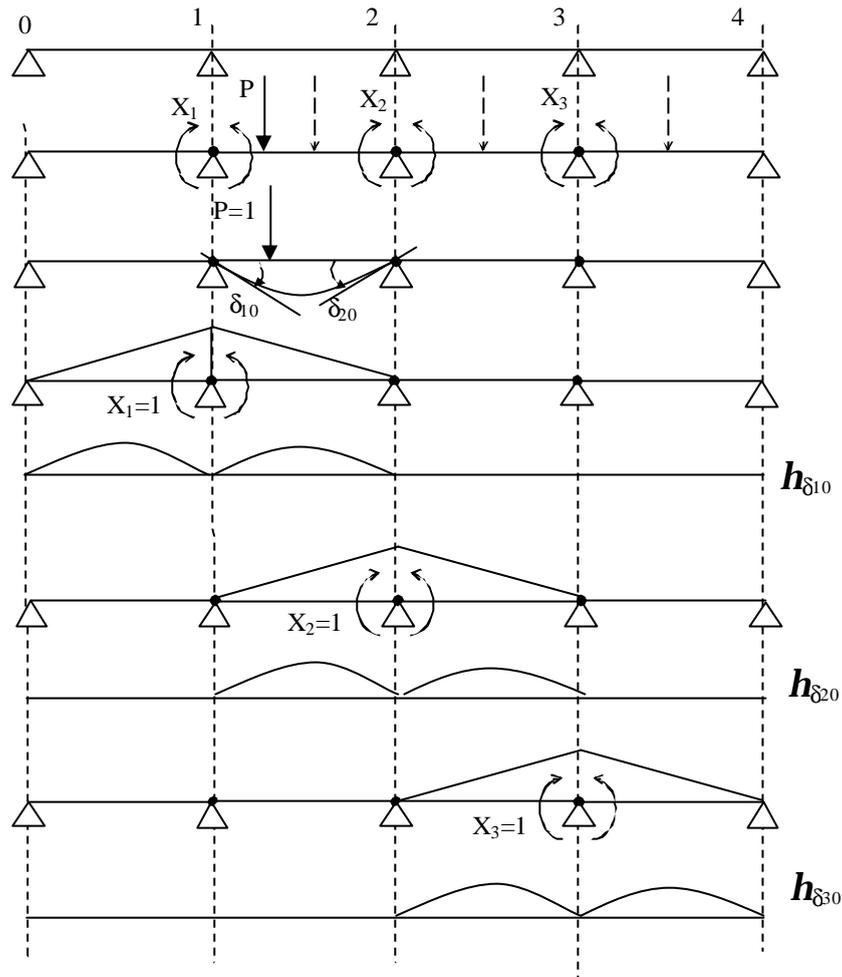
$$\eta_{X_i} = \eta_{\delta_{10}} \cdot \beta_{i1} + \eta_{\delta_{20}} \cdot \beta_{i2} + \eta_{\delta_{30}} \cdot \beta_{i3}$$

Analicemos por etapas las distintas L. de I. que pueden aparecer en nuestra estructura

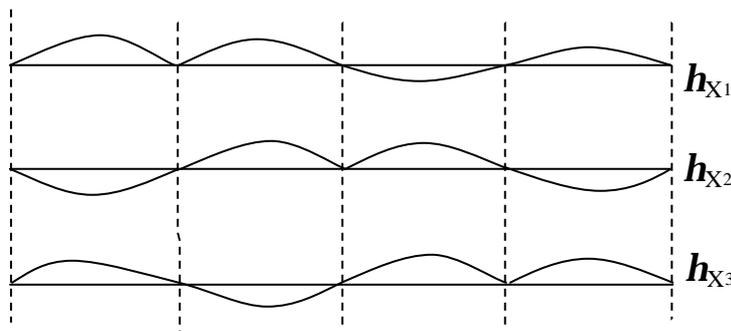
Línea de influencia del término δ_{j0}

Definimos el isostático fundamental con las incógnitas X_1, X_2, X_3 (momento en los apoyos intermedios) aplicando articulación en los apoyos 1, 2 y 3. Aparecen los δ_{j0} , rotaciones relativas en el apoyo j (corrimientos correspondientes con X_j).

De acuerdo con **6.4.2.a** para la L. de I. de δ_{10} ($\eta_{\delta_{10}}$) debo calcular la elástica para la carga $X_1 = 1$. En forma similar se procede para $\eta_{\delta_{20}}$ y $\eta_{\delta_{30}}$.



Línea de influencia de una incógnita X_i



De acuerdo con lo visto:

$$\begin{aligned} \eta_{X_1} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{11} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{12} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{13} \\ \eta_{X_2} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{21} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{22} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{23} \\ \eta_{X_3} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{31} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{32} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{33} \end{aligned}$$

Dónde los diagramas η_{X_1} , η_{X_2} y η_{X_3} son combinaciones lineales de los $\eta_{\delta_{10}}$, $\eta_{\delta_{20}}$, y $\eta_{\delta_{30}}$.

Línea de influencia de una sollicitación (Mf)

Hallaremos la L. de I. del momento flector en el punto A (η_{Mf_A}) del hiperestático.

Sabemos del Capítulo II:

$$M_f^A = M_0^A + X_1 M_1^A + X_2 M_2^A + X_3 M_3^A$$

y por lo tanto será:

$$\eta_{M_f^A} = \eta_{M_0^A} + \eta_{X_1} M_1^A + \eta_{X_2} M_2^A + \eta_{X_3} M_3^A$$

Donde serán:

$\eta_{M_0^A}$: L. de I del M^A en el isostático fundamental

η_{X_1}, η_{X_2} y η_{X_3} : L. de I de las incógnitas hiperestáticas (X_1, X_2 y X_3)

M_1^A, M_2^A y M_3^A : Momento en sección A del isostático para cargas $X_1 = 1; X_2 = 1; X_3 = 1$, respectivamente.

$\eta_{M_f^A}$: línea de influencia del M_f^A del hiperestático; que es una combinación lineal de $h_{M_0^A}, h_{X_1}, h_{X_2}, h_{X_3}$, de acuerdo con la expresión antes vista.

Análisis similares se pueden realizar para las reacciones de apoyo, los esfuerzos N y Q o deformaciones.

